

Sistemas de comunicação de banda limitada baseada em caos: transmitindo sinais caóticos de fato

Bandlimited chaos-based communication systems: conveying chaotic signal indeed

Engenharia de Computação

Rodrigo Tadeu Fontes (rfontes@cefsa.edu.br)

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo (USP) e professor da Faculdade Engenheiro Salvador Arena.

Márcio Eisencraft (marcioft@usp.br)

Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade de São Paulo (USP) e professor da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP)

FTT Journal of Engineering and Business

• SÃO BERNARDO DO CAMPO, SP JUN. 2024

• ISSN 2525-8729

Submissão: 21 out. 2023 Aceitação: 19 abr..2024

Sistema de avaliação: às cegas dupla (double blind review)

FACULDADE ENGENHEIRO SALVADOR ARENA, p. 63 - 77

FTT JOURNAL
of Engineering and Business



Resumo

Neste trabalho, utilizam-se os expoentes de Lyapunov para analisar como as propriedades dinâmicas do mapa de Hénon modificam-se em função dos coeficientes de um filtro de resposta finita inserido na realimentação do sistema. Além disso, considera-se a influência da mensagem inserida na realimentação. Mostra-se também que o sinal gerado pelo sistema pode ser caótico ou não dependendo do filtro e da mensagem utilizados. Os resultados obtidos são relevantes no contexto dos sistemas de comunicação de banda limitada baseados em caos, recentemente propostos na literatura técnica.

Palavras-chave: Comunicação digital baseada em caos. Canal de banda limitada. Filtro digital. Sincronismo caótico. Expoentes de Lyapunov.

Abstract

In this paper, we use Lyapunov exponents to analyze how the dynamical properties of the Hénon map change as a function of the coefficients of a finite impulse response filter inserted in the feedback loop. Also, we consider the influence of a message inserted in the loop. We show that the generated signal can be chaotic or not, depending on the filter and the message used. The obtained results are relevant in the context of bandlimited chaos-based communication systems, that have recently been proposed in the literature.

Keywords: Chaos-based digital communication. Bandlimited channel. Digital filter. Chaotic synchronization. Lyapunov exponents.

Introdução

Um sinal caótico possui três características principais: é limitado em amplitude, é aperiódico e apresenta dependência sensível em relação às condições iniciais (DSCI) (Alligood; Sauer; Yorke, 1997). Essas características estimularam sua utilização em aplicações nas áreas de Telecomunicações e Processamento de Sinais a partir do trabalho original de Pecora e Carroll (Pecora; Carroll, 1990). Eles demonstraram que dois sistemas idênticos, geradores de sinais caóticos, poderiam ser sincronizados independentemente da DSCI. Desde então, algumas possíveis aplicações foram propostas como modulações digitais (Lau; Tse, 2003), marca d'água (Tsekeridou et al., 2001), compressive-sensing (Rontani et al., 2016), comunicações em largura de banda extrema (Dmitriev et al., 2006) entre outras.

Nas últimas décadas, o desempenho dos sistemas de comunicação baseados em caos (SCBC) foram estudados em cenários reais envolvendo distorções no canal, ruídos, limitações em banda e atrasos (Zhang et al., 2020; Liu et al., 2019). Um problema relevante na aplicação de sinais caóticos em sistemas de comunicação é a largura de banda ocupada pelo sinal. Como os canais de transmissão são naturalmente limitados em banda, torna-se necessário conhecer e controlar a largura de banda do sinal caótico transmitido.

Em Eisencraft, Fanganiello e Baccala (2009), foi proposto um SCBC utilizando filtros digitais para controlar a largura de banda do sinal. Para gerar o sinal caótico, foi utilizado o sistema de equações conhecido na literatura especializada como mapa de Hénon (Alligood; Sauer; Yorke, 1997). A inserção desse filtro digital no sistema gerador do sinal caótico resulta em dois problemas relevantes para os SCBC (Fontes, 2017): (i) perda do sincronismo entre os sistemas mestre (transmissor) e escravo (receptor) e (ii) perda da natureza caótica dos sinais transmitidos. As condições necessárias para sincronização com filtros digitais foram estudadas em Fontes e Eisencraft (2015); Fontes e Eisencraft (2016) mostrando-se analiticamente essas condições em função dos coeficientes dos filtros digitais para qualquer mapa. Em Eisencraft, Fanganiello e Monteiro (2011), a natureza caótica dos sinais transmitidos foi numericamente determinada utilizando-se os expoentes de Lyapunov. Entretanto, a mensagem codificada no SCBC foi desprezada.

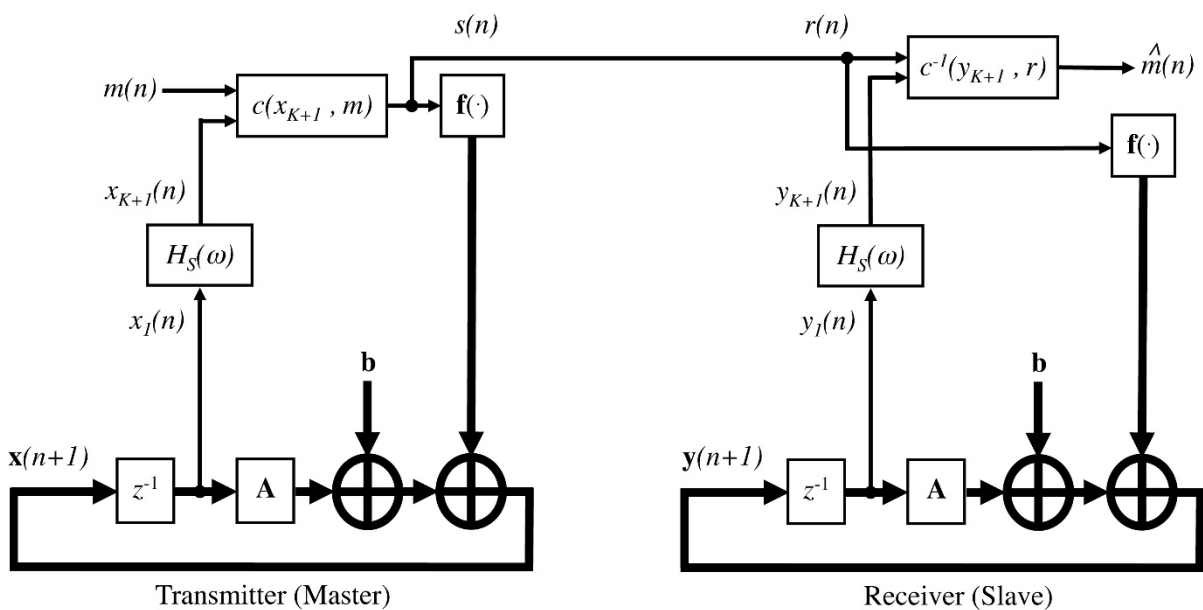
Neste trabalho, os resultados obtidos em Eisencraft, Fanganiello e Monteiro (2011) são ampliados, analisando-se como a mensagem e o filtro afetam a dinâmica caótica do sinal transmitido. Este artigo é organizado da seguinte forma: na Seção 2 revisita-se o SCBC digital de banda limitada proposto em

Fontes, Eisenkraft (2016) e Eisenkraft, Fanganiello e Baccala (2009). Seguindo, na Seção 3, observa-se como a propriedade caótica do sinal transmitido pelo SCBC pode ser medida. Na Seção 4, determinam-se numericamente os expoentes de Lyapunov dos sinais transmitidos e mostram-se, por meio de simulações, as condições nas quais o SCBC transmite sinais caóticos de fato. Finalizando, na Seção 5, descrevem-se algumas conclusões.

Revisão: SCBC digital de banda limitada

O SCBC mostrado na Figura 1 foi proposto em Fontes e Eisenkraft (2015).

Figura 1 – Sistema de comunicação de banda limitada baseado em sincronismo caótico



Fonte : Fontes e Eisenkraft (2015).

As equações do sistema transmissor e do sistema receptor são, respectivamente, descritas por:

$$x(n + 1) = Ax(n) + b + f(s(n)) \quad (1)$$

$$y(n + 1) = Ay(n) + b + f(r(n)), \quad (2)$$

em que o operador z^{-1} é o atraso unitário; as letras minúsculas em negrito representam vetores reais de tamanho $K \times 1$ e A é uma matriz real de dimensões $K \times K$.

A variável de estado $x_1(n)$ é filtrada pelo filtro passa-baixa de resposta ao impulso finito (FIR - *Finite Impulse Response*), $H_S(\omega)$, de comprimento N_S e frequência de corte ω_S . Dessa forma,

$$x_{K+1}(n) = \sum_{j=0}^{N_S-1} c_j x_1(n-j) \quad (3)$$

com c_j , $0 \leq j \leq N_S - 1$, temos os coeficientes do filtro.

A mensagem transmitida é codificada por

$$s(n) = c(x_{K+1}(n), m(n)) = (1 - \gamma)x_{K+1}(n) + \gamma m(n), \quad (4)$$

sendo $0 < \gamma \leq 1$ um parâmetro fixo que controla a proporção da soma dos valores da mensagem e da variável de estado na equação (4). A mensagem pode ser recuperada no receptor por meio de

$$\hat{m}(n) = c^{-1}(y_{K+1}(n), r(n)) = \frac{r(n)}{\gamma} - \frac{(1-\gamma)y_{K+1}(n)}{\gamma}. \quad (5)$$

Utilizando-se a transformação linear do mapa de Hénon (Alligood; Sauer; Yorke, 1997)

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - x_1^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_1(n) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

como o sistema gerador de caos do transmissor da Figura 1, sendo $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ parâmetros de controle do mapa, a equação (1) pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - s^2(n) + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = c_0 x_1(n+1) + c_1 x_1(n) + c_2 x_1(n-1) + \dots + c_{N_S-1} x_1(n - N_S + 2) \end{cases}, \quad (7)$$

com $s(n)$ descrita por (4) e $K = 2$.

Para $N_S > 3$, definindo-se as variáveis de estado auxiliares

$$\begin{cases} x_{K+2}(n+1) \triangleq x_2(n) \\ x_{K+3}(n+1) \triangleq x_{K+2}(n) \\ \vdots \\ x_{N_S}(n+1) \triangleq x_{N_S-1}(n) \end{cases}, \quad (8)$$

o sistema descrito em (7) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) \\ x_3(n+1) = c_0\{\alpha - [(1-\gamma)x_3(n) + \gamma m(n)]^2 + \beta x_2(n)\} + c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) + \\ \quad c_3 x_4(n) + c_4 x_5(n) + \dots + c_{N_S-1} x_{N_S}(n) \\ x_4(n+1) = x_2(n) \\ x_5(n+1) = x_4(n) \\ x_6(n+1) = x_5(n) \\ \vdots \\ x_{N_S}(n+1) = x_{N_S-1}(n) \end{cases}. \quad (9)$$

A mensagem $m(n)$ é escolhida de forma que

$$m(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i p(n - Mi) \quad (10)$$

sendo

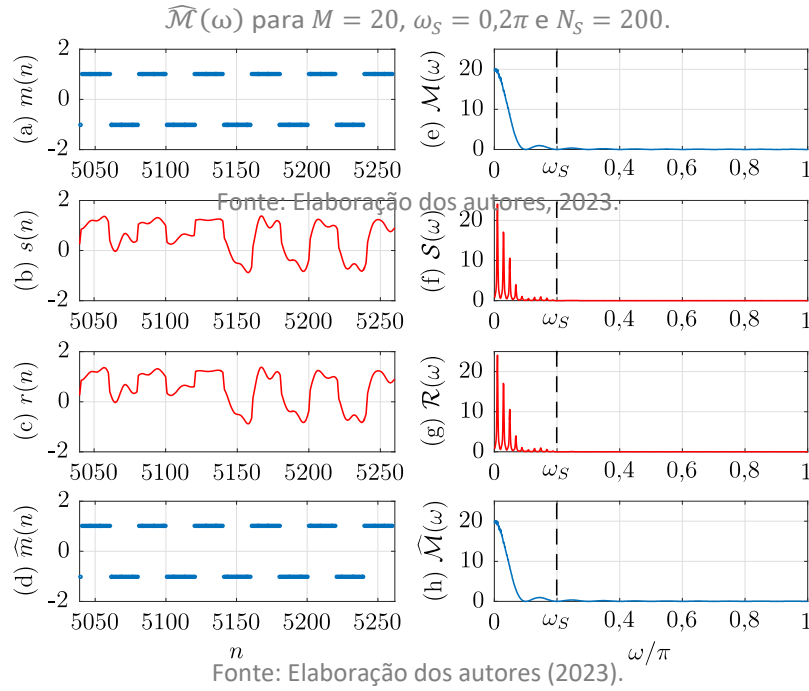
$$p(n) = \begin{cases} 1, & 0 < n < M - 1 \\ 0, & \text{demais valores de } n \end{cases}$$

um pulso retangular de M amostras e $b_i = \pm 1$ uma sequência de bits a ser transmitida. Como mostrado em Fontes e Eisenkraft (2016), considerando-se o segundo nulo da Densidade Espectral de Potência (DEP) de $m(n)$ como o critério para a determinação da largura de banda, ω_M , da mensagem $m(n)$, então

$$\omega_M = \frac{4\pi}{M}. \quad (11)$$

Assim, escolhendo-se $\omega_S > \omega_M$ o filtro $H_S(\omega)$ não afeta a mensagem. Para exemplificar esta afirmação, na Figura 2 mostram-se os sinais $m(n)$, $s(n)$, $r(n)$ e $\hat{m}(n)$ para $\omega_S = 0,2\pi$, $N_S = 200$ e $M = 20$ em canal ideal, ou seja, $s(n) = r(n)$. Os sinais caóticos são gerados utilizando-se $\alpha = 0,9$ e $\beta = 0,3$. Os gráficos mostram que $m(n)$ é claramente recuperada sem erros, ou seja, $\hat{m}(n) = m(n)$.

Figura 2 – Sinais: (a) $m(n)$, (b) $s(n)$, (c) $r(n)$, (d) $\hat{m}(n)$ e respectivas DEP: (e) $\mathcal{M}(\omega)$, (f) $\mathcal{S}(\omega)$, (g) $\mathcal{R}(\omega)$ e (h)



Na próxima seção, discute-se como medir numericamente a natureza caótica de (9). Essa medida permite determinar para quais condições o sinal transmitido $s(n)$ é caótico, para diversas escolhas de $H_S(\omega)$ e considerando-se $m(n)$ não desprezível.

Expoentes de Lyapunov e sinais caóticos

Os expoentes de Lyapunov podem ser utilizados para se medir a DSCI. Em geral, para uma função $x(n+1) = f(x(n))$, com derivadas contínuas em R^K , cada sinal $\{x(0), x(1), x(2), \dots\}$ tem K números de Lyapunov, os quais medem a taxa de separação ao longo de K em direções ortogonais.

O k -ésimo número de Lyapunov é definido por Alligood, Sauer e Yorke (1997)

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} r_k^{(n) \frac{1}{n}}, \quad (12)$$

se o limite existir, em que $r_k^{(n)}$ é o k -ésimo maior eixo ortogonal do elipsóide $J(x(n))U$, sendo $J(x(n))$ a matriz Jacobiana do mapa validado em $x(n)$ e U a hipersfera unitária e R^K centralizada em $x(0)$ (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1997). O k -ésimo expoente de Lyapunov para condições iniciais $x(0)$ é $h_k = \ln L_k$. Note-se que, por definição, $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_K$ e $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_K$.

A matriz Jacobiana associada a (9) é

$$J(x(n)) = \begin{bmatrix} 0 & \beta & -2(1-\gamma)^2 x_3(n) - 2(\gamma-\gamma^2)m(n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & c_0\beta + c_2 & -2(1-\gamma)^2 c_0 x_3(n) - 2(\gamma-\gamma^2)c_0 m(n) & c_3 & \cdots & c_{N_S-2} & c_{N_S-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Assim, usando-se (13) no método do mapa tangente descrito em ALLIGOOD, SAUER e YORKE (1997), pode-se calcular o maior expoente de Lyapunov h_1 de (9). Neste trabalho, para simplificar: $h \triangleq h_1$. Em Eisencraft, Fanganiello e Monteiro (2011), uma análise preliminar sobre a natureza caótica do sinal transmitido pelo SCBC da Figura 1 é apresentada considerando $m(n) \equiv 0$. Mesmo neste caso, o transmissor pode gerar sinais caóticos, periódicos e até ilimitados em amplitude, dependendo dos coeficientes dos filtros.

No trabalho aqui apresentado, esses resultados são expandidos considerando $m(n)$ um parâmetro variável no tempo como descrito em (10).

Análise numérica dos expoentes de Lyapunov

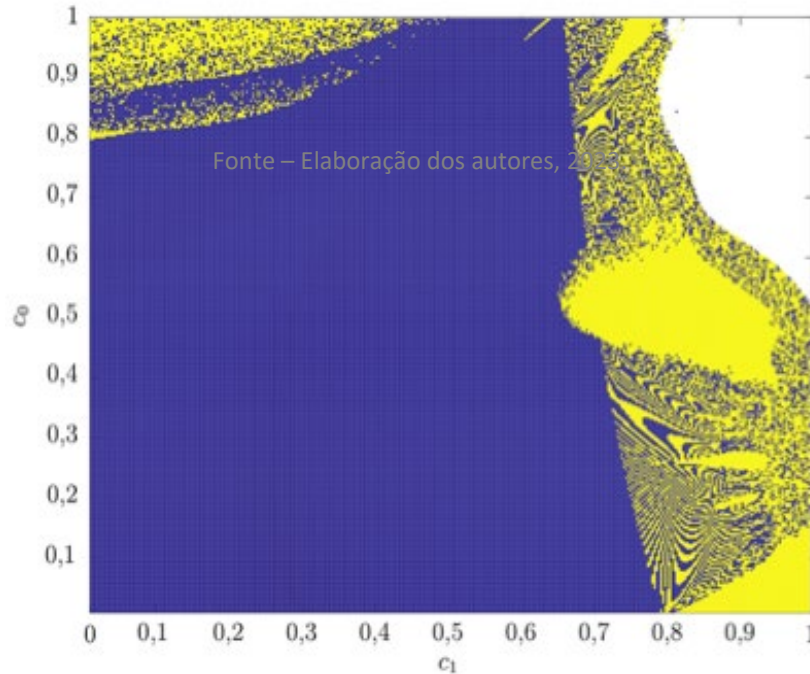
Em todas as simulações presentes neste trabalho, a não ser em casos mencionados, considera-se $\beta = 0,3$. O sistema dinâmico é iterado 10^4 vezes.

Considera-se também que os coeficientes dos filtros são projetados pelo método do janelamento com janelas de Hamming ou Blackman (Oppenheim; Schafer, 2009) e $m(n)$ é dada por (10).

Primeiramente, considera-se $N_S = 2$ de forma que o filtro tenha apenas dois coeficientes, c_0 e c_1 . Para esta primeira escolha, na Figura 3 mostra-se o maior expoente de Lyapunov, h , for $\alpha = 1,4$ e $\gamma = 0$. Nas regiões azuis (mais escuras) $h < 0$ e $s(n)$ não é caótico, enquanto na região amarela (mais claras) $h > 0$ e $s(n)$ é caótico. Nas regiões brancas $s(n)$ diverge.

Para $0,6 \leq c_1 \leq 1$ observam-se estruturas fractais (Alligood; Sauer; Yorke, 1997). Mesmo pequenas variações nos valores dos coeficientes podem mudar completamente a natureza caótica de $s(n)$.

Figura 3 – Expoentes de Lyapunov h para o plano $c_0 \times c_1$ com $\alpha = 1,4$ e $\{c_0, c_1\} \in [0,1]$. Nas regiões azuis (mais escuras) $h < 0$, nas regiões amarelas (mais claras) $h > 0$ e nas regiões brancas $s(n)$ diverge.

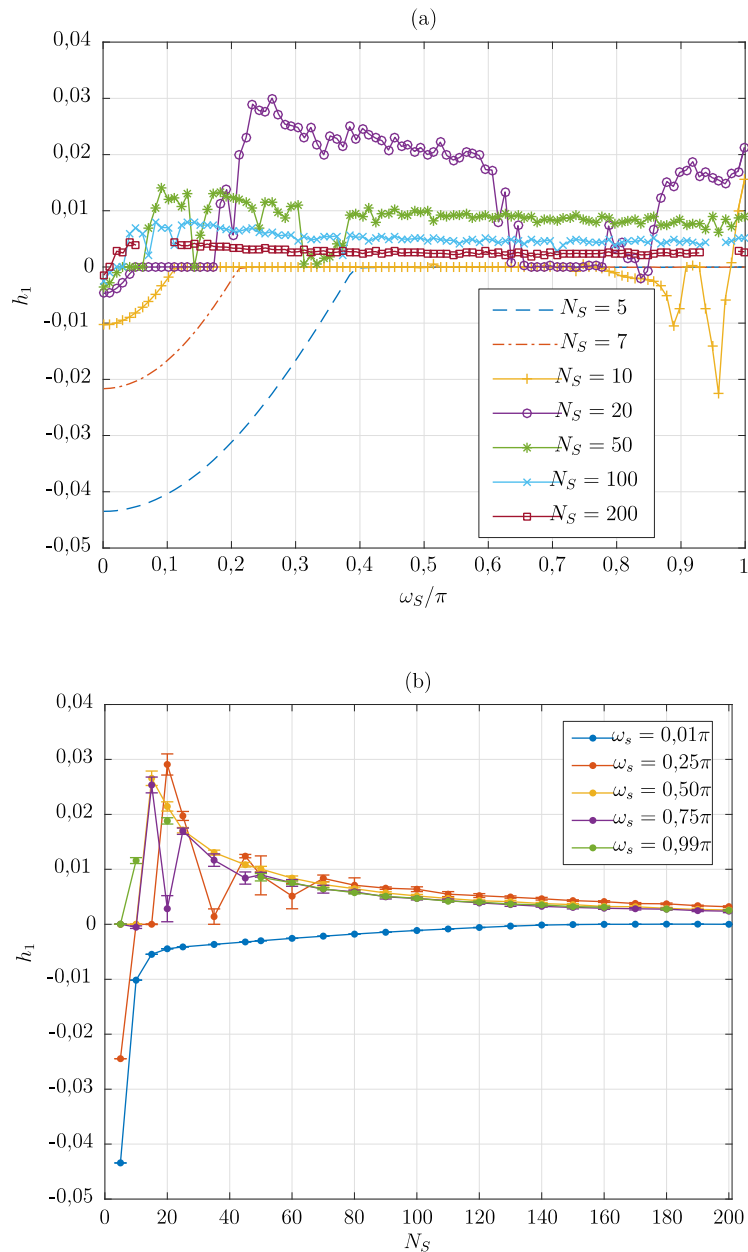


Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Seguindo com a análise, considera-se $N_S > 2$. Como o número dos coeficientes dos filtros é aumentado, projetam-se esses filtros usando as janelas de Hamming ou Blackman e realizam-se as análises em termos de N_S e da frequência de corte ω_S do filtro passa-baixo.

Na Figura 4 mostra-se h em função de (a) ω_S para N_S fixo e (b) N_S para ω_S fixo, e usando a janela de Hamming, $\gamma = 0$ considerando-se $\alpha = 0,9$. Essa escolha de α é baseada nos resultados prévios obtidos em Eisenkraft; Fanganiello e Monteiro (2011), nos quais, utilizando-se esse valor, é possível obter largas faixas de valores de ω_S e N_S em que $s(n)$ é caótico.

Figura 4 – Maior expoente de Lyapunov, h , para o sistema descrito em (9) usando-se filtros projetados com a janela de Hamming em função: (a) da frequência de corte ω_s e (b) do número de coeficientes do filtro N_S .



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

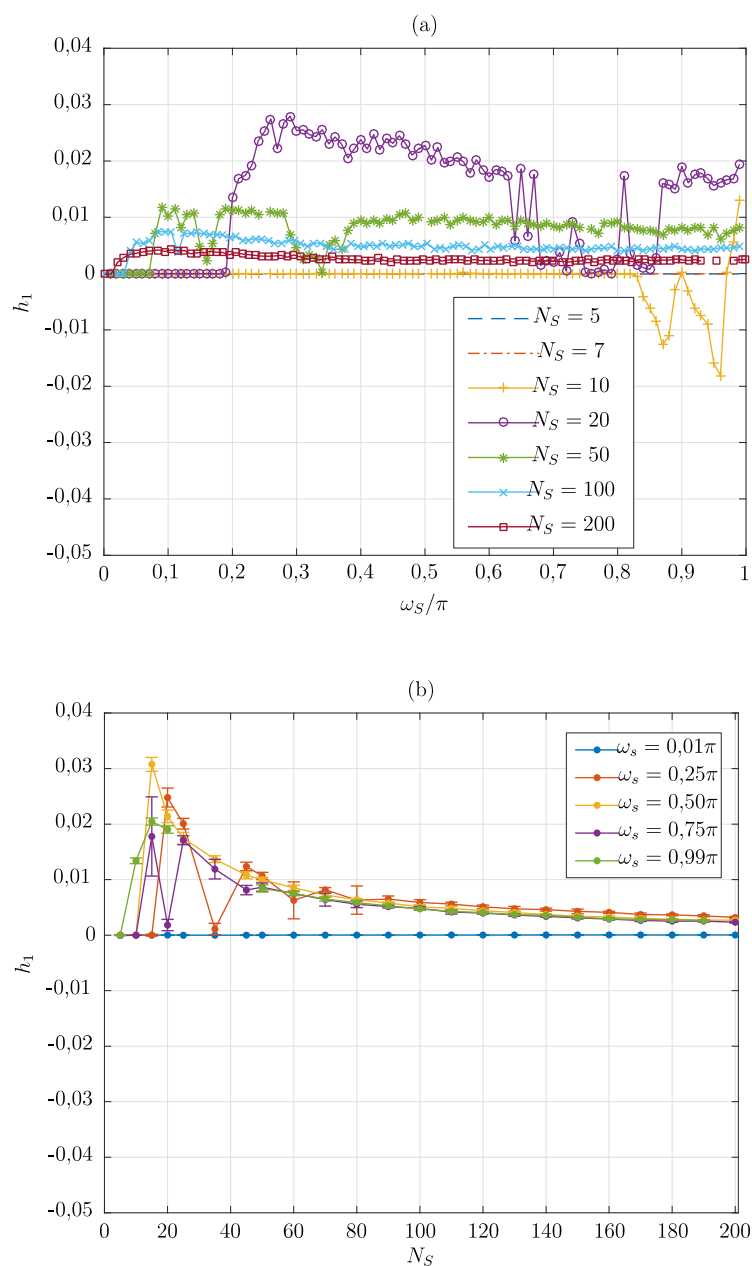
Na Figura 4 (a), observa-se que para $N_S > 10$, há um largo intervalo de valores de frequência de corte para os quais $s(n)$ é caótico ($h > 0$). Por outro lado, para $N_S \leq 10$ a condição caótica é praticamente nula com poucas exceções. Na Figura 4 (b), os valores mostrados nos gráficos são determinados tomando-se a média dos expoentes obtidos com 10 condições iniciais para o mesmo N_S e ω_s .

As barras horizontais em cada gráfico medem o desvio padrão em torno do valor médio de h . Para $N_S > 45$, exceto quando $\omega_s = 0,01\pi$, $s(n)$ é caótico.

Em geral, os resultados da Figura 4 mostram que o SCBC transmite sinais caóticos quando N_S é alto e ω_S não muito pequeno. Dado que os filtros podem mudar a natureza caótica de $s(n)$, é verificada a influência da janela usada no projeto do filtro FIR.

Nas Figuras 5 (a) e 5 (b), apresenta-se h em função dos mesmos parâmetros usados na Figura 4, para filtros projetados com a janela de Blackman (Oppenheim; Schaffer, 2009). Como pode ser observado a partir dos resultados, a escolha da janela dos filtros não interfere na natureza caótica de $s(n)$.

Figura 5 – Maior expoente de Lyapunov, h , para o sistema descrito na Equação (9) que usa filtros projetados com a janela de Blackman em função: (a) da frequência de corte ω_S e (b) do número de coeficientes do filtro N_S .

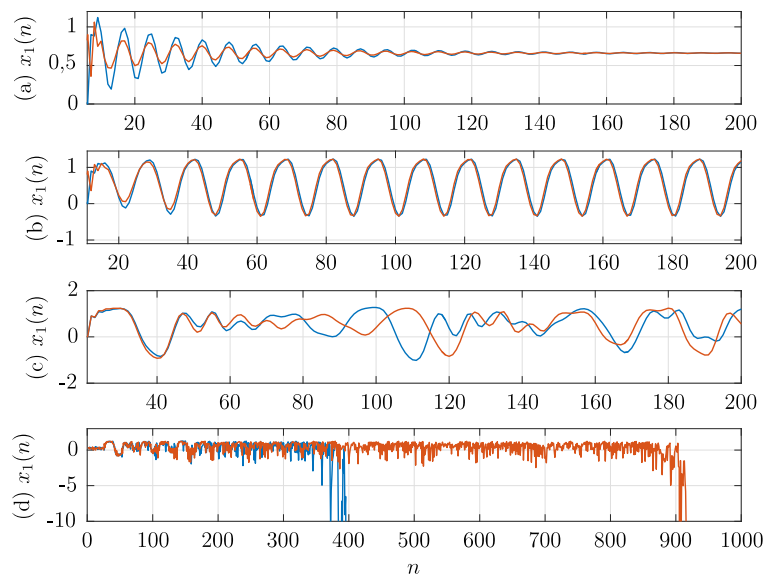


Fonte: Elaboração dos autores (2023).

A Figura 6 ilustra a variedade de sinais $s(n)$ baseada nos expoentes de Lyapunov obtidos nas figuras anteriores. Na Figura 6 (a) mostra-se $s(n)$ for $N_S = 5$ e $\omega_S = 0,25\pi$ resultando em $h = -0,043$, ou seja, o sinal não é caótico. Mesmo com condições iniciais distantes, $s(n)$ converge para um ponto fixo.

Na Figura 6 (b), $N_S = 10$, $\omega_S = 0,25\pi$, para os quais $h \approx 0$, e, novamente, não é um sinal caótico. Nesse caso, $s(n)$ é periódico para condições iniciais distantes. Na Figura 6 (c) $N_S = 20$ e $\omega_S = 0,25$ resultando $h = 0,029$, e, dessa forma, um sinal caótico. Claramente $s(n)$ apresenta DSCI para condições iniciais próximas. Por fim, na Figura 6 (d), para $N_S = 25$, $\omega_S = 0,99\pi$ e condições iniciais distantes $s(n)$ diverge.

Figura 6 – Órbitas de $s(n)$ obtidas do sistema descrito em (9), considerando-se $\gamma = 0$, com filtros de Hamming para (a) $N_S = 5$, $\omega_S = 0,25\pi$ resultando $h = -0,043$ para $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0,001 \ 0,001 \ 0,001]^T$, $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0,900 \ 0,900 \ 0,900]^T$, (b) $N_S = 10$, $\omega_S = 0,25\pi$, resultando $h \approx 0$, para $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0,001 \ 0,001 \ 0,001]^T$, $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0,900 \ 0,900 \ 0,900]^T$ (c) $N_S = 20$, $\omega_S = 0,25\pi$, resultando $h = 0,029$, para $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0,001 \ 0,001 \ 0,001]^T$, $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0,000 \ 0,001 \ 0,001]^T$ (d) $N_S = 25$, $\omega_S = 0,99\pi$, para $\mathbf{x}^{(1)}(0) = [0,001 \ 0,001 \ 0,001]^T$, $\mathbf{x}^{(2)}(0) = [0,900 \ 0,900 \ 0,900]^T$ resultando em divergência.



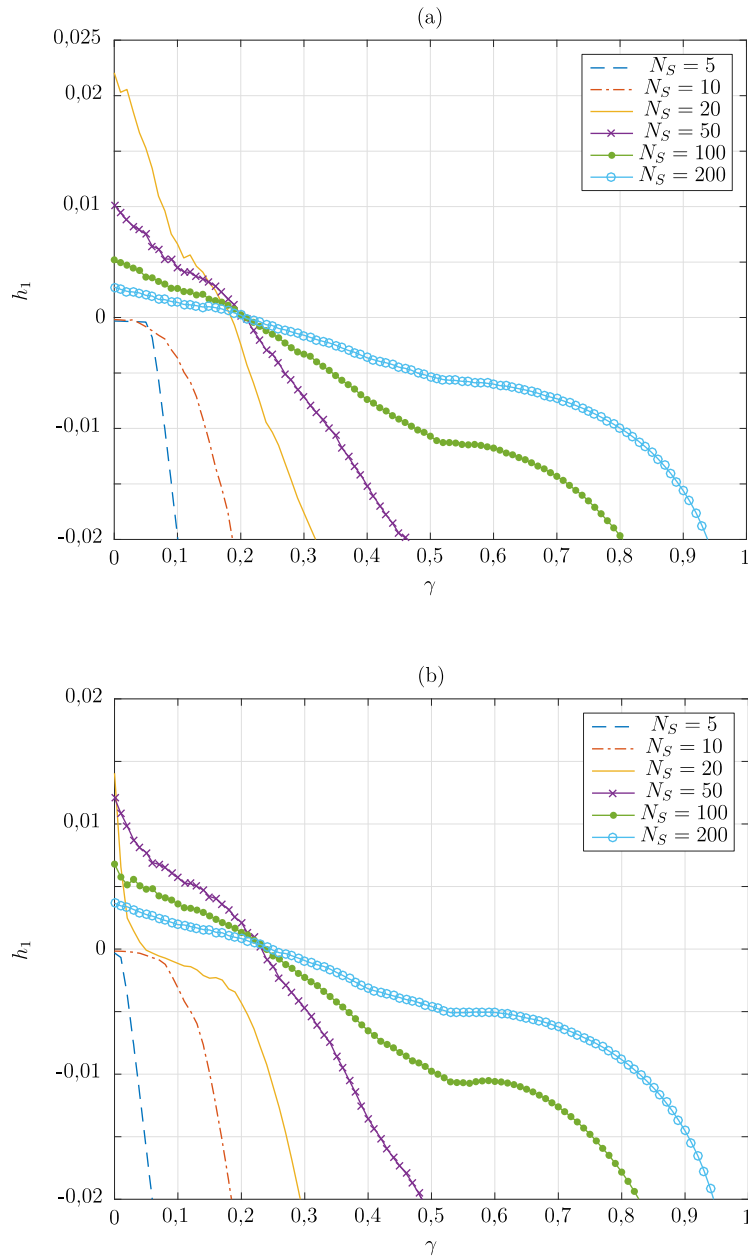
Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Completa-se a análise dos expoentes de Lyapunov determinando-se h em função do parâmetro γ de codificação da mensagem (4).

Na Figura 7, mostra-se h em função de γ para diversos valores de N_S , com $\alpha = 0,9$ e (a) $\omega_S = 0,5\pi$ e $M = 8$ e (b) $\omega_S = 0,2\pi$ e $M = 20$. Os filtros são projetados com a janela de Blackman.

O SCBC gera sinais caóticos quando $\gamma < 0,2$ e $N_S \geq 20$. Este resultado é importante pois γ controla a quantidade de $m(n)$ em $s(n)$. Isso significa que a função de codificação pode também modificar a natureza caótica de $s(n)$ e assegura que $m(n)$ não deve ser desprezada.

Figura 7 – Maior expoente de Lyapunov, h_1 , para o sistema descrito em (9), em função de γ , para vários valores de N_S , usando a janela de Blackman e considerando $\alpha = 0,9$ para: (a) $\omega_S = 0,5\pi$ e $M = 8$ e (a) $\omega_S = 0,2\pi$ e $M = 20$.



Fonte: Elaboração dos autores (2023).

Para ilustrar a importância deste resultado, em Fontes e Eisencraft (2016) este parâmetro foi escolhido como $\gamma = 0,3$. Embora essa escolha produza um sinal $s(n)$ de banda limitada, os resultados apresentados aqui, na Figura 7, mostram que a natureza caótica de $s(n)$ foi perdida.

De modo geral, as simulações apresentadas neste trabalho mostram que um sistema de comunicação digital de banda limitada, baseado em sincronismo caótico pode, de fato, transmitir sinais caóticos entre seu transmissor e receptor, usando o mapa de Hénon, para $\alpha = 0,9$, $\gamma < 0,2$, $N_S > 45$ e $\omega_S > 0,1\pi$.

Considerações finais

Neste trabalho, apresenta-se uma análise estendida dos sinais transmitidos por um sistema de comunicação digital de banda limitada baseado em sincronismos que são de fato caóticos. Os filtros utilizados para controlar a largura de banda dos sinais podem alterar as propriedades caóticas desses sinais. Além disso, a mensagem é um parâmetro relevante e, combinada com os filtros, pode também afetar a natureza caótica dos sinais transmitidos. Determina-se analiticamente a matriz Jacobiana resultante da inserção dos filtros e da codificação da mensagem, para o mapa de Hénon. Os expoentes de Lyapunov são calculados para se determinar quais escolhas dos parâmetros do SCBC: α , γ , N_S e ω_S de fato permitem que o sistema transmita sinais caóticos. Os resultados obtidos mostram que o SCBC estudado neste trabalho transmite de fato sinais caóticos para $\alpha = 0,9$, $\gamma < 0,2$, $N_S > 45$ e $\omega_S > 0,1\pi$.

Referências

- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. [S.l.]: Springer, 1997. (Textbooks in Mathematical Sciences). ISBN 9780387946771.
- DMITRIEV, A. et al. Ultrawideband wireless communications based on dynamic chaos. **Journal of Communications Technology and Electronics**, Nauka/Interperiodica, v. 51, n. 10, p. 1126–1140, 2006. ISSN 1064-2269.
- EISENCRAFT, M.; FANGANIELLO, R. D.; BACCALA, L. A. Synchronization of Discrete-Time Chaotic Systems in Bandlimited Channels. **Mathematical Problems In Engineering**, v. 2009, p. 1–13, 2009. ISSN 1024-123X.

EISENCRAFT, M.; FANGANIELLO, R. D.; MONTEIRO, L. H. A. Chaotic synchronization in discrete-time systems connected by bandlimited channels. **Communications Letters, IEEE**, v. 15, n. 6, p. 671–673, June 2011. ISSN 1089-7798.

FONTES, RODRIGO TADEU. **Sistema de comunicação digital em banda limitada baseado em sincronismo caótico**. 2017. Tese (Doutorado em Sistemas Eletrônicos) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. doi:10.11606/T.3.2017.tde-12072017-133122.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. Conditions for synchronizing a master-slave bandlimited chaos-based communication system. In: **Proceedings of the VI International Workshop on Telecommunications (IWT2015)**. Santa Rita do Sapucaí: Instituto Nacional de Telecomunicações - Inatel (INATEL), 2015. v. 1, p. 1–4.

FONTES, R. T.; EISENCRAFT, M. A digital bandlimited chaos-based communication system. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 37, p. 374–385, 2016. ISSN 1007-5704.

LAU, F. C. M.; TSE, C. K. **Chaos-based digital communication systems**. Berlin: Springer, 2003.

LIU, Z. et al. A secure and robust frequency and time diversity aided ofdm-dcsk modulation system not requiring channel state information. **IEEE Transactions on Communications**, p. 1–1, 2019. ISSN 1558-0857.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-Time Signal Processing**. 3rd. ed. [S.l.]: Prentice Hall Press, 2009. ISBN 0131988425, 9780131988422.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 64, n. 8, p. 821–824, fev. 1990.

RONTANI, D. et al. Compressive sensing with optical chaos. **Scientific Reports**, v. 6, p. 35206 EP –, 12 2016.

TSEKERIDOU, S. et al. Statistical analysis of a watermarking system based on Bernoulli chaotic sequences. **Signal Processing**, ELSEVIER SCIENCE BV, PO BOX 211, 1000 AE AMSTERDAM, NETHERLANDS, 81, n. 6, p. 1273–1293, JUN 2001. ISSN 0165-1684.

ZHANG, L. et al. Efficient and secure non-coherent ofdm-based overlapped chaotic chip position shift keying system: Design and performance analysis. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 67, n. 1, p. 309–321, Jan 2020. ISSN 1558-0806.